

ZUR LINEAREN TRANSFORMATION DER ϑ -REIHEN*

VON

F. MERTENS

§ 1.

Es sei ω eine complexe Grösse, in welcher der Coefficient von i positiv ist, und zur Abkürzung

$$q = e^{i\pi\omega}.$$

Definirt man die ϑ -Reihen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(x, \omega) &= \sum (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi ix}, \\ \vartheta_1(x, \omega) &= -i \sum (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\ \vartheta_2(x, \omega) &= \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\ \vartheta_3(x, \omega) &= \sum q^{n^2} e^{2n\pi ix}, \\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)\end{aligned}$$

so besteht die lineare Transformation dieser Reihen in der Ersetzung von ω durch $(\gamma + \delta\omega)/(\alpha + \beta\omega)$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende Zahlen sind.

Wird zur Abkürzung

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M$$

gesetzt, so kann mit Hilfe der elementaren Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(x, 1 + \omega) &= \vartheta_3(x, \omega), \\ \vartheta_1(x, 1 + \omega) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_1(x, \omega), \\ \vartheta_2(x, 1 + \omega) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_2(x, \omega), \\ \vartheta_3(x, 1 + \omega) &= \vartheta_0(x, \omega), \\ \vartheta_0\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_2(x, \omega),\end{aligned}$$

* Presented to the Society (Chicago) April 6, 1901. Received for publication March 5, 1901.

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = -i\sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_1(x, \omega),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_0(x, \omega),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_3(x, \omega),$$

leicht gezeigt werden, dass $\vartheta_1(x/N, M/N)$ die Gestalt $a e^{bx^2} \vartheta_1(x, \omega)$ hat, wo a, b Constanten bezeichnen.

Ist nämlich β nicht = 0, so sei β' der kleinste nicht negative Rest von δ in Bezug auf den Theiler β und

$$\delta = g\beta + \beta', \quad \gamma = ga + a',$$

$$\gamma' = -a, \quad \delta' = -\beta,$$

$$a' + \beta'\omega = N', \quad \gamma' + \delta'\omega = M'.$$

Es ist dann

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1, \quad |\beta'| < |\beta|,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) &= \vartheta_1\left(\frac{-x}{M'}, g - \frac{N'}{M'}\right) = -e^{\frac{g\pi i}{4}} \vartheta_1\left(\frac{x}{M'}, \frac{-N'}{M'}\right) \\ &= ie^{\frac{g\pi i}{4}} \sqrt{\frac{-iM'}{N'}} e^{\frac{i\pi x^2}{M'N'}} \vartheta_1\left(\frac{x}{N'}, \frac{M'}{N'}\right); \end{aligned}$$

$\vartheta_1(x/N, M/N)$ wird also die behauptete Gestalt haben, wenn $\vartheta_1(x/N', M'/N')$ sie hat. Die Ausdrücke M', N' sind aber insofern einfacher wie M, N , als $|\beta'| < |\beta|$ ist.

Ist β' noch nicht = 0, so können ebenso Ausdrücke

$$M'' = \gamma'' + \delta''\omega, \quad N'' = a'' + \beta''\omega$$

angegeben werden, in welchen $|\beta''| < |\beta'|$ ist, und $\vartheta_1(x/N, M/N)$ hat zugleich mit $\vartheta_1(x/N'', M''/N'')$ die behauptete Gestalt.

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man zu einer linearen Transformation $(\gamma^{(m)} + \delta^{(m)}\omega)/(\alpha^{(m)} + \beta^{(m)}\omega)$, in welcher $\beta^{(m)} = 0$ ist. Es genügt daher die behauptete Gestalt von $\vartheta_1(x/N, M/N)$ für den Fall $\beta = 0$ nachzuweisen.

Der Gleichung

$$a\delta = 1$$

zufolge ist dann $a = \delta = \pm 1$ und daher

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = \vartheta_1(ax, a\gamma + \omega) = a e^{\frac{a\gamma\pi i}{4}} \vartheta_1(x, \omega).$$

Um die Constante b zu bestimmen, ersetze man x durch $x + N$. Es wird

$$\begin{aligned}\vartheta_1\left(\frac{x+N}{N}, \frac{M}{N}\right) &= -\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a e^{b(x+N)^2} \vartheta_1(x+N, \omega) \\ &= a e^{bx^2+2bNx+bN^2} (-1)^{a+\beta} \frac{\vartheta_1(x, \omega)}{q^{\beta^2} e^{2\beta\pi ix}}\end{aligned}$$

und nach Forthebung von $a e^{bx^2} \vartheta_1(x, \omega)$

$$-1 = e^{2(bN-i\beta\pi)x} e^{bN^2} q^{-\beta^2} (-1)^{a+\beta}.$$

Es muss also

$$bN - \beta\pi i = 0, \quad b = \frac{\beta\pi i}{N}$$

sein.

Die grösste Schwierigkeit bereitet die Bestimmung der Constante a . Differentiirt man die Gleichung

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a e^{bx^2} \vartheta_1(x, \omega)$$

nach x und setzt hierauf $x = 0$, so ergibt sich

$$\frac{1}{N} \vartheta'_1\left(0, \frac{M}{N}\right) = a \vartheta'_1(0, \omega).$$

Es ist aber, wenn mit Herrn DEDEKIND

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{24}} \Pi(1 - q^{2n}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gesetzt wird,

$$\vartheta'_1(0, \omega) = 2\pi \eta^3(\omega)$$

und daher

$$a = \frac{1}{N} \left(\frac{\eta(M/N)}{\eta(\omega)} \right)^3.$$

Die Bestimmung von a ist hierdurch auf die von $\eta(M/N)$ zurückgeführt.

In dem Folgenden soll der Ausdruck $\eta(M/N)$ mit Hilfe der Formeln

$$\eta(1 + \omega) = e^{\frac{i\pi}{12}} \eta(\omega),$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \eta(\omega)$$

ermittelt werden.*

* HERMITE, Liouville's Journal, Ser. II., T. III.

DEDEKIND, Erläuterungen zum XXVII Fragment in Riemann's Werken.

H. WEBER, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen und Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Acta Mathematica, Bd. VI.

§ 2.

Hilfssatz. Es seien A, B von Null verschiedene complexe Grössen, deren reelle Bestandtheile nicht negativ und nicht beide $= 0$ sind. Zieht man die Quadratwurzeln \sqrt{A}, \sqrt{B} so aus, dass ihre reellen Bestandtheile positiv sind, so hat auch das Product $\sqrt{A} \sqrt{B}$ einen positiven reellen Bestandtheil und ist daher derjenige Werth der Quadratwurzel \sqrt{AB} , welcher dieselbe Eigenschaft hat.

Setzt man

$$\sqrt{A} = a + ia', \quad \sqrt{B} = b + ib',$$

so ist

$$A = a^2 - a'^2 + 2iaa', \quad B = b^2 - b'^2 + 2ibb',$$

$$\sqrt{A} \sqrt{B} = ab - a'b' + i(ab' + ba'),$$

und nach der Annahme a, b positiv, eine der Grössen $a^2 - a'^2, b^2 - b'^2$ positiv, die andere nicht negativ. Ist etwa $a^2 - a'^2$ positiv, so sind $a + a', a - a'$ positiv. Da ferner die Grössen $b + b', b - b'$ nicht entgegengesetzte Vorzeichen haben und ihre Summe positiv ist, so ist eine derselben positiv, die andere nicht negativ. Daher ist auch eine der Grössen

$$(a + a')(b - b'), \quad (a - a')(b + b')$$

positiv, die andere nicht negativ und ihre Summe $2(ab - a'b')$ somit positiv.

§ 3.

Es sei

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze, der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende, Zahlen sind, und es handle sich um die Bestimmung des Ausdrucks $\eta(M/N)$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha\delta$ oder $\beta\gamma$ ungerade ist.

Sind α, δ ungerade, so darf α positiv angenommen werden, da man eintretendenfalls die Vorzeichen aller vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ umkehren könnte, ohne den Quotienten M/N zu ändern.

Es sei zunächst β gerade und vom Null verschieden.

Der absolut kleinste Rest δ_1 der ungeraden Zahl $\delta - \beta(\gamma + 1)$ in Bezug auf den Theiler 2β ist ungerade und liegt demzufolge, vom Vorzeichen abgesehen, unter β . Setzt man

$$\delta = g\beta + \delta_1, \quad \gamma = g\alpha + \gamma_1,$$

so ist

$$\alpha\delta_1 - \beta\gamma_1 = 1$$

und γ_1 den Congruenzen

$$g \equiv \gamma + 1 \pmod{2},$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma - g \pmod{2}$$

zufolge ungerade. Es sei ferner β_1 der absolut kleinste Rest von β in Bezug auf den Theiler $2\delta_1$ und

$$\beta = h\delta_1 + \beta_1, \quad a = h\gamma_1 + a_1,$$

so dass h, β_1 gerade, a_1 ungerade sind.

Bezeichnet a die Einheit mit dem Vorzeichen von a_1 und setzt man

$$a_1 = aa', \quad \beta_1 = a\beta', \quad \gamma_1 = a\gamma', \quad \delta_1 = a\delta',$$

$$a' + \beta'\omega = N', \quad \gamma' + \delta'\omega' = M',$$

so ist

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

a' positiv und die Bestimmung von $\eta(M/N)$ auf die von $\eta(M'/N')$ zurückführbar.

Man hat, wenn zur Abkürzung

$$a_1 + \beta_1\omega = N_1, \quad \gamma_1 + \delta_1\omega = M_1,$$

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \rho$$

gesetzt wird,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left(g + \frac{M_1}{N}\right) = \rho^g \eta\left(\frac{M_1}{N}\right),$$

$$\eta\left(\frac{M_1}{N}\right) = \sqrt{\frac{iN}{M_1}} \eta\left(-\frac{N}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(-\frac{N}{M_1}\right) = \eta\left(-h - \frac{N_1}{M_1}\right) = \rho^{-h} \eta\left(-\frac{N_1}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(-\frac{N_1}{M_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \eta\left(\frac{M_1}{N_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right),$$

wo die Quadratwurzeln, wie überall in dem Folgenden, mit positivem reellen Bestandtheil auszuziehen sind. Hiernach wird

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h} \sqrt{\frac{iN}{M_1}} \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Bezeichnen c, d die Einheit mit dem Vorzeichen von γ_1 beziehungsweise δ_1 , so hat β der Gleichung $\beta = (a\delta_1 - 1)/\gamma_1$ zufolge das Vorzeichen von cd und jede

der Grössen iN/M_1 , $-ibM_1$, $-icbN$ einen positiven reellen Bestandtheil, daher ist

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}} \sqrt{-ibM_1} = \sqrt{bN},$$

und sonach

$$\sqrt{-icbN} \sqrt{ci} = \sqrt{bN}, \quad \sqrt{-icbN} \sqrt{cbi} = \sqrt{N}$$

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-ibM_1}} \frac{\sqrt{ci}}{\sqrt{cbi}}.$$

Ist β_1 von Null verschieden, so hat es, der Gleichung $\beta_1 = (a_1\delta_1 - 1)/\gamma_1$ zufolge, das Vorzeichen von $a_1\delta_1/\gamma_1$ oder acb und die reellen Bestandtheile der Grössen $-iM_1/N_1$, $-1/ibM_1$, $-icbN'$ sind positiv. Sonach ist

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \sqrt{\frac{1}{-ibM_1}} = \frac{1}{\sqrt{bN_1}} = \frac{1}{\sqrt{adbN'}},$$

$$\sqrt{-icbN'} \sqrt{aci} = \sqrt{adbN'}, \quad \sqrt{-icbN'} \sqrt{cbi} = \sqrt{N'},$$

und demzufolge

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} = \frac{\sqrt{-ibM_1}}{\sqrt{N'}} \frac{\sqrt{cbi}}{\sqrt{aci}}.$$

Diese Gleichung ist aber auch noch richtig, wann $\beta_1 = 0$ ist, weil dann $a_1\delta_1 = 1$, also

$$a_1 = \delta_1 = a = b, \quad N' = 1,$$

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} = \sqrt{-ibM_1}, \quad \sqrt{iac} = \sqrt{cbi}$$

ist.

Die Einsetzung der gefundenen Werthe von $\sqrt{iN/M_1}$, $\sqrt{-iM_1/N_1}$ ergibt

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\rho^{g-h} \sqrt{ci} \sqrt{N}}{\sqrt{aci} \sqrt{N'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right);$$

da aber

$$ci = i^c, \quad aci = i^{ac}$$

ist, so wird

$$\sqrt{ci} = e^{\frac{c\pi i}{4}}, \quad \sqrt{aci} = e^{\frac{ac\pi i}{4}},$$

$$\frac{\sqrt{ci}}{\sqrt{aci}} = e^{\frac{i\pi}{4} c(1-a)} = i^{\frac{c(1-a)}{2}}$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h} i^{\frac{c(1-a)}{2}} \frac{1}{\sqrt{N'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Die Potenz

$$i^{\frac{c(1-a)}{2}}$$

lässt sich mit Hilfe des LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichens vereinfachen.

Die Identität

$$\begin{aligned} c(1-a) &= (1-a)a'\gamma_1 + (a-1)(a'\gamma_1 - c) \\ &= (a' - a)\gamma_1 + (a - a_1)\gamma_1 + c(a-1)(a'c\gamma_1 - 1) \end{aligned}$$

ergibt nach Ersetzung von $a - a_1$ durch $h\gamma_1$

$$c(1-a) = h\gamma_1^2 + (a' - a)\gamma_1 + c(a-1)(a'c\gamma_1 - 1),$$

und es wird daher, weil γ_1 ungerade ist,

$$c(1-a) \equiv h + (a' - a)\gamma_1 + (a-1)(a'c\gamma_1 - 1) \pmod{8},$$

$$i^{\frac{c(1-a)}{2}} = i^{\frac{h+(a'-a)\gamma_1}{2}} (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{a'c\gamma_1-1}{2}}.$$

Es ist aber

$$(-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{a'c\gamma_1-1}{2}} = \left(\frac{a}{a'c\gamma_1} \right) = \left(\frac{a}{a'} \right) \left(\frac{a}{\gamma_1} \right),$$

$$i^{\frac{(a'-a)\gamma_1}{2}} = i^{\frac{a-a'}{2}} (-1)^{\frac{a'-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}}$$

und nach dem quadratischen Reciprocitätssatze,

$$(-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} = \left(\frac{a'}{-\gamma_1} \right) \left(\frac{-\gamma_1}{a'} \right) = \left(\frac{a'}{\gamma_1} \right) \left(\frac{-\gamma_1}{a'} \right),$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} = \left(\frac{a}{-\gamma_1} \right) \left(\frac{-\gamma_1}{a} \right) \left(\frac{a}{\gamma_1} \right) \left(\frac{-\gamma_1}{a} \right).$$

Aus den Gleichungen

$$a = h\gamma_1 + a_1,$$

$$-\beta\gamma_1 = 1 - a\delta_1, \quad -\beta_1\gamma_1 = 1 - a_1\delta_1$$

folgt überdies

$$\left(\frac{a}{\gamma_1} \right) = \left(\frac{a_1}{\gamma_1} \right) = \left(\frac{a a'}{\gamma_1} \right) = \left(\frac{a}{\gamma_1} \right) \left(\frac{a'}{\gamma_1} \right),$$

$$\left(\frac{-\beta\gamma_1}{a} \right) = \left(\frac{-\gamma_1}{a} \right) \left(\frac{\beta}{a} \right) = 1, \quad \left(\frac{-\gamma_1}{a} \right) = \left(\frac{\beta}{a} \right),$$

$$\left(\frac{-\beta_1\gamma_1}{a'} \right) = \left(\frac{-\gamma_1}{a'} \right) \left(\frac{\beta_1}{a'} \right) = 1, \quad \left(\frac{-\gamma_1}{a'} \right) = \left(\frac{\beta_1}{a'} \right) = \left(\frac{a}{a'} \right) \left(\frac{\beta'}{a'} \right).$$

Somit wird

$$i^{\frac{c(1-a)}{2}} = i^{\frac{h+a-a'}{2}} \left(\frac{\beta}{a}\right) \left(\frac{\beta'}{a'}\right).$$

Nach Ersetzung von $i^{h/2}$ durch ρ^{3h} ergibt sich daher

$$\left(\frac{\beta}{a}\right) \frac{i^{\frac{1-a}{2}}}{\sqrt{N}} \eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g+2h} \left(\frac{\beta'}{a'}\right) \frac{i^{\frac{1-a'}{2}}}{\sqrt{N'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Der Factor ρ^{g+2h} kann in zwei andere zerlegt werden, welche beziehungsweise nur von a, β, γ, δ und $a', \beta', \gamma', \delta'$ abhängen.

Der einfachste Weg zu dieser Zerlegung beruht auf dem Umstande, dass die Produkte $(a^2 - 1)(\beta^2 - 1), (\gamma_1^2 - 1)(\delta_1^2 - 1)$ Vielfache von 24 sind. Denn einer der Factoren $a^2 - 1, \beta^2 - 1$ muss nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 sein, weil a, β nicht beide durch 3 theilbar sein können, und $a^2 - 1$ ist ein Vielfaches von 8. Dieselben Gründe gelten für $(\gamma_1^2 - 1)(\delta_1^2 - 1)$. Es ist daher

$$\begin{aligned} 1 &\equiv a^2 + \beta^2 - a^2\beta^2 \\ 1 &\equiv \gamma_1^2 + \delta_1^2 - \gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned} \pmod{24},$$

und die Multiplication mit g, h ergibt

$$\begin{aligned} g &\equiv a g a + \beta g \beta - a^2 \beta g \beta \\ h &\equiv \gamma_1 h \gamma_1 + \delta_1 h \delta_1 - h \gamma_1^2 \delta_1^2 \end{aligned} \pmod{24}.$$

Nach Ersetzung von $ga, g\beta, h\gamma_1, h\delta_1$, durch $\gamma - \gamma_1, \delta - \delta_1, a - a_1, \beta - \beta_1$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} g &\equiv a(\gamma - \gamma_1) + \beta(\delta - \delta_1) - a^2\beta(\delta - \delta_1) \\ h &\equiv \gamma_1(a - a_1) + \delta_1(\beta - \beta_1) - h\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned} \pmod{24},$$

und man erhält durch Addition

$$\begin{aligned} g + h &\equiv a\gamma - a_1\gamma_1 + \beta\delta - \beta_1\delta_1 - a^2\beta\delta + a_1^2\beta_1\delta_1 \\ &\quad + \delta_1(a^2\beta - a_1^2\beta_1) - h\gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Ersetzt man aber in den Identitäten

$$\begin{aligned} a^2\beta - a_1^2\beta_1 &= (a^2 + aa_1 + a_1^2)(\beta - \beta_1) + (a + a_1)(a\beta_1 - a_1\beta), \\ a\beta - a_1\beta_1 &= (a + a_1)(\beta - \beta_1) + a\beta_1 - a_1\beta. \end{aligned}$$

$\beta - \beta_1$ durch $h\delta_1, a\beta_1 - a_1\beta$ durch $-h$, so wird

$$\begin{aligned} \delta_1(a^2\beta - a_1^2\beta_1) &= h\delta_1^2(a^2 + aa_1 + a_1^2) - h\delta_1(a + a_1), \\ a\beta - a_1\beta_1 &= h\delta_1(a + a_1) - h, \end{aligned}$$

und die Addition ergibt

$$\delta_1(a^2\beta - a_1^2\beta_1) = -a\beta + a_1\beta_1 - h + h\delta_1^2(a^2 + aa_1 + a_1^2).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung nimmt die vorstehende Congruenz für $g + h$, wenn zur Abkürzung

$$A = a\gamma + \beta\delta - a^2\beta\delta - a\beta,$$

$$A' = a'\gamma' + \beta'\delta' - a'^2\beta'\delta' - a'\beta',$$

$$C = h(a^2 + aa_1 + a_1^2 - \gamma_1^2)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$g + 2h \equiv A - A' + \delta_1^2 C \pmod{24}$$

an.

Nach Ersetzung von a durch $h\gamma_1 + a_1$ wird ferner

$$C = (h^3 - h)\gamma_1^2 + 3h^2a_1\gamma_1 + 3ha_1^2.$$

Es ist also einerseits, weil $h^3 - h$ nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 ist,

$$C \equiv 0 \pmod{3}$$

und anderseits, weil h gerade, a_1 und γ_1 ungerade sind,

$$C \equiv -h + h^2 + 3h = 4\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} + 1\right) \pmod{8}$$

$$\equiv 0 \pmod{8}.$$

Da hiernach C ein Vielfaches von 24 ist, so folgt

$$g + 2h \equiv A - A' \pmod{24},$$

$$\rho^{g+2h} = \rho^{A-A'},$$

und man hat

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)^{i\frac{1-a}{2}\rho^{-A}} \eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta'}{a'}\right)^{i\frac{1-a'}{2}\rho^{-A'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)^{i\frac{1-a}{2}\rho^{-A}} \eta\left(\frac{M}{N}\right)$$

ungeändert bleibt, wenn man von den Zahlen a, β, γ, δ zu $a', \beta', \gamma', \delta'$ übergeht. Letztere Zahlen besitzen aber dieselben Eigenschaften, welche bei den

ursprünglichen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vorausgesetzt werden und sind insofern einfacher, als $|\beta'| < |\beta|$ ist. Denn es ist

$$\alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1,$$

α', δ' ungerade, β' gerade, α' positiv und $|\beta'| < |\delta_1| < |\beta|$.

Ist β' noch nicht $= 0$, so kann eine neue Reihe von vier Zahlen $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ ermittelt werden, für welche der vorstehende Ausdruck denselben Werth hat wie für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Da die Zahlen $|\beta|, |\beta'|, \dots$ eine abnehmende Reihe bilden, so führt dieses Verfahren nach einigen Schritten zu vier Zahlen $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}, \delta^{(n)}$, deren zweite $= 0$ ist.

Hiermit ist die Aufgabe in allen Fällen auf die Bestimmung des vorstehenden Ausdrucks in dem Falle $\beta = 0$ zurückgeführt. Dann ist aber

$$\alpha = \delta = 1, \quad A = \gamma, \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{0}{1}\right) = 1,$$

und der fragliche Ausdruck wird

$$= \rho^{-\gamma} \eta(\gamma + \omega) = \eta(\omega).$$

Somit ist bei geradem β

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^A \sqrt{N} \eta(\omega).$$

Ist β ungerade, so ist $\beta - \alpha$ gerade, $\delta - \gamma$ ungerade,

$$\alpha(\delta - \gamma) - (\beta - \alpha)\gamma = 1$$

und daher nach dem vorhergehenden Falle

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left[\frac{\gamma + \frac{(\delta - \gamma)\omega}{1 + \omega}}{\alpha + \frac{(\beta - \alpha)\omega}{1 + \omega}}\right] = \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^C \sqrt{\frac{N}{1 + \omega}} \eta\left(\frac{\omega}{1 + \omega}\right),$$

wo

$$C = \alpha\gamma + (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)(1 - \alpha^2) - \alpha(\beta - \alpha).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$C - A - 1 = (1 - \alpha^2)(\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma - 1)$$

$$= (\alpha^3 - \alpha)(2\delta - \gamma)$$

$$\equiv 0 \pmod{24},$$

weil $a^3 - a$ durch 3 und 8 theilbar ist, und

$$\begin{aligned}\eta\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right) &= \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}} \eta\left(-1-\frac{1}{\omega}\right) \\ &= \rho^{-1} \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}} \eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) \\ &= \rho^{-1} \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}} \sqrt{-i\omega} \eta(\omega).\end{aligned}$$

Da überdies die Grössen iN/ω , $-i\omega/(1+\omega)$, $-i\omega$ positive reelle Bestandtheile haben, so wird

$$\sqrt{\frac{iN}{\omega}} \sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}} = \sqrt{\frac{N}{1+\omega}}, \quad \sqrt{\frac{iN}{\omega}} \sqrt{-i\omega} = \sqrt{N}$$

und demnach

$$\sqrt{\frac{N}{1+\omega}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\omega}} \sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}}.$$

Daher ist, wie bei geradem β ,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^A \sqrt{N} \eta(\omega).$$

§ 4.

Es sei $\beta\gamma$ ungerade. Man darf β positiv annehmen.

Man hat

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left[\frac{\delta + \gamma\frac{1}{\omega}}{\beta + \alpha\frac{1}{\omega}}\right]$$

und daher auf Grund des bereits erledigten Falles

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{-a}{\beta}\right) i^{\frac{\beta-1}{2}} \rho^B \sqrt{\frac{N}{\omega}} \eta\left(\frac{-1}{\omega}\right),$$

wo

$$B = \beta\delta + \alpha\gamma - \alpha\gamma\beta^2 + \alpha\beta$$

ist. Es ist aber

$$\left(\frac{-a}{\beta}\right) = \left(\frac{-1}{\beta}\right) \left(\frac{a}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \left(\frac{a}{\beta}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \, \eta(\omega),$$

$$\sqrt{-iN} \frac{1}{\sqrt{-i\omega}} = \sqrt{\frac{N}{\omega}}$$

und sonach

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{a}{\beta}\right) i^{\frac{1-\beta}{2}} \rho^{\beta} \sqrt{-iN} \, \eta(\omega).$$
