

# ZUR LINEAREN TRANSFORMATION DER $\vartheta$ -REIHEN\*

VON

F. MERTENS

## § 1.

Es sei  $\omega$  eine komplexe Grösse, in welcher der Coefficient von  $i$  positiv ist, und zur Abkürzung

$$q = e^{i\pi\omega}.$$

Definirt man die  $\vartheta$ -Reihen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(x, \omega) &= \sum (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi ix}, \\ \vartheta_1(x, \omega) &= -i \sum (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\ \vartheta_2(x, \omega) &= \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\ \vartheta_3(x, \omega) &= \sum q^{n^2} e^{2n\pi ix}, \\ (n &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)\end{aligned}$$

so besteht die lineare Transformation dieser Reihen in der Ersetzung von  $\omega$  durch  $(\gamma + \delta\omega)/(\alpha + \beta\omega)$ , wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende Zahlen sind.

Wird zur Abkürzung

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M$$

gesetzt, so kann mit Hilfe der elementaren Transformationsformeln:

$$\vartheta_0(x, 1 + \omega) = \vartheta_3(x, \omega),$$

$$\vartheta_1(x, 1 + \omega) = e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_1(x, \omega),$$

$$\vartheta_2(x, 1 + \omega) = e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_2(x, \omega),$$

$$\vartheta_3(x, 1 + \omega) = \vartheta_0(x, \omega),$$

$$\vartheta_0\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_2(x, \omega),$$

---

\* Presented to the Society (Chicago) April 6, 1901. Received for publication March 5, 1901.

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = -i\sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_1(x, \omega),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_0(x, \omega),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_3(x, \omega),$$

leicht gezeigt werden, dass  $\vartheta_1(x/N, M/N)$  die Gestalt  $ae^{bx^2}\vartheta_1(x, \omega)$  hat, wo  $a, b$  Constanten bezeichnen.

Ist nämlich  $\beta$  nicht  $= 0$ , so sei  $\beta'$  der kleinste nicht negative Rest von  $\delta$  in Bezug auf den Theiler  $\beta$  und

$$\delta = g\beta + \beta', \quad \gamma = ga + a',$$

$$\gamma' = -a, \quad \delta' = -\beta,$$

$$a' + \beta'\omega = N', \quad \gamma' + \delta'\omega = M'.$$

Es ist dann

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1, \quad |\beta'| < |\beta|,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) &= \vartheta_1\left(\frac{-x}{M'}, g - \frac{N'}{M'}\right) = -e^{\frac{g\pi i}{4}} \vartheta_1\left(\frac{x}{M'}, -\frac{N'}{M'}\right) \\ &= ie^{\frac{g\pi i}{4}} \sqrt{\frac{-iM'}{N'}} e^{\frac{i\pi x^2}{M'N'}} \vartheta_1\left(\frac{x}{N'}, \frac{M'}{N'}\right); \end{aligned}$$

$\vartheta_1(x/N, M/N)$  wird also die behauptete Gestalt haben, wenn  $\vartheta_1(x/N', M'/N')$  sie hat. Die Ausdrücke  $M'$ ,  $N'$  sind aber insofern einfacher wie  $M$ ,  $N$ , als  $|\beta'| < |\beta|$  ist.

Ist  $\beta'$  noch nicht  $= 0$ , so können ebenso Ausdrücke

$$M'' = \gamma'' + \delta''\omega, \quad N'' = a'' + \beta''\omega$$

angegeben werden, in welchen  $|\beta''| < |\beta'|$  ist, und  $\vartheta_1(x/N, M/N)$  hat zugleich mit  $\vartheta_1(x/N'', M''/N'')$  die behauptete Gestalt.

Durch Fortsetzung dieser Schritte gelangt man zu einer linearen Transformation  $(\gamma^{(m)} + \delta^{(m)}\omega)/(a^{(m)} + \beta^{(m)}\omega)$ , in welcher  $\beta^{(m)} = 0$  ist. Es genügt daher die behauptete Gestalt von  $\vartheta_1(x/N, M/N)$  für den Fall  $\beta = 0$  nachzuweisen.

Der Gleichung

$$a\delta = 1$$

zufolge ist dann  $a = \delta = \pm 1$  und daher

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = \vartheta_1(ax, a\gamma + \omega) = a e^{\frac{a\gamma\pi i}{4}} \vartheta_1(x, \omega).$$

Um die Constante  $b$  zu bestimmen, ersetze man  $x$  durch  $x + N$ . Es wird

$$\vartheta_1\left(\frac{x+N}{N}, \frac{M}{N}\right) = -\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a e^{bx^2} \vartheta_1(x+N, \omega)$$

$$= a e^{bx^2+2bNx+bN^2} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\vartheta_1(x, \omega)}{q^{\beta^2} e^{2\beta\pi ix}}$$

und nach Forthebung von  $a e^{bx^2} \vartheta_1(x, \omega)$

$$-1 = e^{2(bN-i\beta\pi)x} e^{bN^2} q^{-\beta^2} (-1)^{\alpha+\beta}.$$

Es muss also

$$bN - \beta\pi i = 0, \quad b = \frac{\beta\pi i}{N}$$

sein.

Die grösste Schwierigkeit bereitet die Bestimmung der Constante  $a$ . Differentiirt man die Gleichung

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a e^{bx^2} \vartheta_1(x, \omega)$$

nach  $x$  und setzt hierauf  $x = 0$ , so ergiebt sich

$$\frac{1}{N} \vartheta'_1\left(0, \frac{M}{N}\right) = a \vartheta'_1(0, \omega).$$

Es ist aber, wenn mit Herrn DEDEKIND

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod (1 - q^{2n}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gesetzt wird,

$$\vartheta'_1(0, \omega) = 2\pi \eta^3(\omega)$$

und daher

$$a = \frac{1}{N} \left( \frac{\eta(M/N)}{\eta(\omega)} \right)^3.$$

Die Bestimmung von  $a$  ist hierdurch auf die von  $\eta(M/N)$  zurückgeführt.

In dem Folgenden soll der Ausdruck  $\eta(M/N)$  mit Hilfe der Formeln

$$\eta(1 + \omega) = e^{\frac{i\pi}{12}} \eta(\omega),$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \eta(\omega)$$

ermittelt werden.\*

\* HERMITE, Liouville's Journal, Ser. II., T. III.

DEDEKIND, Erläuterungen zum XXVII Fragment in Riemann's Werken.

H. WEBER, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen und Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Acta Mathematica, Bd. VI.

## § 2.

*Hilfssatz.* Es seien  $A, B$  von Null verschiedene komplexe Grössen, deren reelle Bestandtheile nicht negativ und nicht beide  $= 0$  sind. Zieht man die Quadratwurzeln  $\sqrt{A}, \sqrt{B}$  so aus, dass ihre reellen Bestandtheile positiv sind, so hat auch das Product  $\sqrt{A} \sqrt{B}$  einen positiven reellen Bestandtheil und ist daher derjenige Werth der Quadratwurzel  $\sqrt{AB}$ , welcher dieselbe Eigenschaft hat.

Setzt man

$$\sqrt{A} = a + ia', \quad \sqrt{B} = b + ib',$$

so ist

$$A = a^2 - a'^2 + 2ia'a', \quad B = b^2 - b'^2 + 2ib'b',$$

$$\sqrt{A} \sqrt{B} = ab - a'b' + i(ab' + ba'),$$

und nach der Annahme  $a, b$  positiv, eine der Grössen  $a^2 - a'^2, b^2 - b'^2$  positiv, die andere nicht negativ. Ist etwa  $a^2 - a'^2$  positiv, so sind  $a + a', a - a'$  positiv. Da ferner die Grössen  $b + b', b - b'$  nicht entgegengesetzte Vorzeichen haben und ihre Summe positiv ist, so ist eine derselben positiv, die andere nicht negativ. Daher ist auch eine der Grössen

$$(a + a')(b - b'), \quad (a - a')(b + b')$$

positiv, die andere nicht negativ und ihre Summie  $2(ab - a'b')$  somit positiv.

## § 3.

Es sei

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze, der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende, Zahlen sind, und es handele sich um die Bestimmung des Ausdrucks  $\eta(M/N)$ .

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $\alpha\delta$  oder  $\beta\gamma$  ungerade ist.

Sind  $\alpha, \delta$  ungerade, so darf  $\alpha$  positiv angenommen werden, da man eintretendenfalls die Vorzeichen aller vier Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  umkehren könnte, ohne den Quotienten  $M/N$  zu ändern.

Es sei zunächst  $\beta$  gerade und vom Null verschiedenen.

Der absolut kleinste Rest  $\delta_1$  der ungeraden Zahl  $\delta - \beta(\gamma + 1)$  in Bezug auf den Theiler  $2\beta$  ist ungerade und liegt demzufolge, vom Vorzeichen abgesehen, unter  $\beta$ . Setzt man

$$\delta = g\beta + \delta_1, \quad \gamma = g\alpha + \gamma_1,$$

so ist

$$\alpha\delta_1 - \beta\gamma_1 = 1$$

und  $\gamma_1$  den Congruenzen

$$g \equiv \gamma + 1 \pmod{2},$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma - g \pmod{2}$$

zufolge ungerade. Es sei ferner  $\beta_1$  der absolut kleinste Rest von  $\beta$  in Bezug auf den Theiler  $2\delta_1$  und

$$\beta = h\delta_1 + \beta_1, \quad a = h\gamma_1 + a_1,$$

so dass  $h, \beta_1$  gerade,  $a_1$  ungerade sind.

Bezeichnet  $\alpha$  die Einheit mit dem Vorzeichen von  $a_1$  und setzt man

$$\alpha_1 = \alpha a', \quad \beta_1 = \alpha \beta', \quad \gamma_1 = \alpha \gamma', \quad \delta_1 = \alpha \delta',$$

$$a' + \beta' \omega = N', \quad \gamma' + \delta' \omega = M',$$

so ist

$$a' \delta' - \beta' \gamma' = 1,$$

$a'$  positiv und die Bestimmung von  $\eta(M/N)$  auf die von  $\eta(M'/N')$  zurückführbar.

Man hat, wenn zur Abkürzung

$$a_1 + \beta_1 \omega = N_1, \quad \gamma_1 + \delta_1 \omega = M_1,$$

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \rho$$

gesetzt wird,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left(g + \frac{M_1}{N}\right) = \rho^g \eta\left(\frac{M_1}{N}\right),$$

$$\eta\left(\frac{M_1}{N}\right) = \sqrt{\frac{iN}{M_1}} \eta\left(-\frac{N}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(-\frac{N}{M_1}\right) = \eta\left(-h - \frac{N_1}{M_1}\right) = \rho^{-h} \eta\left(\frac{-N_1}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-N_1}{M_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \eta\left(\frac{M_1}{N_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right),$$

wo die Quadratwurzeln, wie überall in dem Folgenden, mit positivem reellen Bestandtheil auszuziehen sind. Hiernach wird

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h} \sqrt{\frac{iN}{M_1}} \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Bezeichnen  $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$  die Einheit mit dem Vorzeichen von  $\gamma_1$  beziehungsweise  $\delta_1$ , so hat  $\beta$  der Gleichung  $\beta = (a\delta_1 - 1)/\gamma_1$  zufolge das Vorzeichen von  $\mathfrak{cd}$  und jede

der Grössen  $iN/M_1, -i\mathfrak{d}M_1, -i\mathfrak{cd}N$  einen positiven reellen Bestandtheil, daher ist

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}} \sqrt{-i\mathfrak{d}M_1} = \sqrt{\mathfrak{d}N},$$

$$\sqrt{-i\mathfrak{cd}N} \sqrt{\mathfrak{ci}} = \sqrt{\mathfrak{d}N}, \quad \sqrt{-i\mathfrak{cd}N} \sqrt{\mathfrak{cdi}} = \sqrt{N}$$

und sonach

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}} \frac{\sqrt{\mathfrak{ci}}}{\sqrt{\mathfrak{cdi}}}.$$

Ist  $\beta_1$  von Null verschieden, so hat es, der Gleichung  $\beta_1 = (\alpha_1 \delta_1 - 1)/\gamma_1$  zufolge, das Vorzeichen von  $\alpha_1 \delta_1 / \gamma_1$  oder  $\mathfrak{acd}$  und die reellen Bestandtheile der Grössen  $-iM_1/N_1, -1/i\mathfrak{d}M_1, -i\mathfrak{cd}N'$  sind positiv. Sonach ist

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} \sqrt{\frac{1}{-i\mathfrak{d}M_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{d}N_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{acd}N'}},$$

$$\sqrt{-i\mathfrak{cd}N'} \sqrt{\mathfrak{aci}} = \sqrt{\mathfrak{acd}N'}, \quad \sqrt{-i\mathfrak{cd}N'} \sqrt{\mathfrak{cdi}} = \sqrt{N'},$$

und demzufolge

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} = \frac{\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}}{\sqrt{N'}} \frac{\sqrt{\mathfrak{cdi}}}{\sqrt{\mathfrak{aci}}}.$$

Diese Gleichung ist aber auch noch richtig, wann  $\beta_1 = 0$  ist, weil dann  $\alpha_1 \delta_1 = 1$ , also

$$\alpha_1 = \delta_1 = \alpha = \mathfrak{d}, \quad N' = 1,$$

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} = \sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}, \quad \sqrt{\mathfrak{aci}} = \sqrt{\mathfrak{cdi}}$$

ist.

Die Einsetzung der gefundenen Werthe von  $\sqrt{iN/M_1}, \sqrt{-iM_1/N_1}$  ergiebt

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\rho^{g-h} \sqrt{\mathfrak{ci}} \sqrt{N}}{\sqrt{\mathfrak{aci}} \sqrt{N'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right);$$

da aber

$$\mathfrak{ci} = i^c, \quad \mathfrak{aci} = i^{\mathfrak{ac}}$$

ist, so wird

$$\sqrt{\mathfrak{ci}} = e^{\frac{c\pi i}{4}}, \quad \sqrt{\mathfrak{aci}} = e^{\frac{\mathfrak{a}\pi i}{4}},$$

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{ci}}}{\sqrt{\mathfrak{aci}}} = e^{\frac{c\pi}{4} \cdot c(1-\mathfrak{a})} = i^{\frac{c(1-\mathfrak{a})}{2}}$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h} i^{\frac{c(1-\mathfrak{a})}{2}} \frac{1}{\sqrt{N'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Die Potenz

$$i^{\frac{c(1-a)}{2}}$$

lässt sich mit Hilfe des LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichens vereinfachen.

Die Identität

$$\begin{aligned} c(1-a) &= (1-a)a'\gamma_1 + (a-1)(a'\gamma_1 - c) \\ &= (a'-a)\gamma_1 + (a-a_1)\gamma_1 + c(a-1)(a'c\gamma_1 - 1) \end{aligned}$$

ergibt nach Ersetzung von  $a - a_1$  durch  $h\gamma_1$

$$c(1-a) = h\gamma_1^2 + (a'-a)\gamma_1 + c(a-1)(a'c\gamma_1 - 1),$$

und es wird daher, weil  $\gamma_1$  ungerade ist,

$$\begin{aligned} c(1-a) &\equiv h + (a'-a)\gamma_1 + (a-1)(a'c\gamma_1 - 1) \pmod{8}, \\ i^{\frac{c(1-a)}{2}} &= i^{\frac{h+(a'-a)\gamma_1}{2}} (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{a'c\gamma_1-1}{2}}. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{a'c\gamma_1-1}{2}} &= \left( \frac{a}{a'c\gamma_1} \right) = \left( \frac{a}{a'} \right) \left( \frac{a}{\gamma_1} \right), \\ i^{\frac{(a'-a)\gamma_1}{2}} &= i^{\frac{a-a'}{2}} (-1)^{\frac{a'-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} \end{aligned}$$

und nach dem quadratischen Reciprocitätssatze,

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} &= \left( \frac{a'}{-\gamma_1} \right) \left( \frac{-\gamma_1}{a'} \right) = \left( \frac{a'}{\gamma_1} \right) \left( \frac{-\gamma_1}{a'} \right), \\ (-1)^{\frac{a-1}{2} \frac{\gamma_1+1}{2}} &= \left( \frac{a}{-\gamma_1} \right) \left( \frac{-\gamma_1}{a} \right) = \left( \frac{a}{\gamma_1} \right) \left( \frac{-\gamma_1}{a} \right). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen

$$a = h\gamma_1 + a_1,$$

$$-\beta\gamma_1 = 1 - a\delta_1, \quad -\beta_1\gamma_1 = 1 - a_1\delta_1$$

folgt überdies

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{\gamma_1} \right) &= \left( \frac{a_1}{\gamma_1} \right) = \left( \frac{a a'}{\gamma_1} \right) = \left( \frac{a}{\gamma_1} \right) \left( \frac{a'}{\gamma_1} \right), \\ \left( \frac{-\beta\gamma_1}{a} \right) &= \left( \frac{-\gamma_1}{a} \right) \left( \frac{\beta}{a} \right) = 1, \quad \left( \frac{-\gamma_1}{a} \right) = \left( \frac{\beta}{a} \right), \\ \left( \frac{-\beta_1\gamma_1}{a'} \right) &= \left( \frac{-\gamma_1}{a'} \right) \left( \frac{\beta_1}{a'} \right) = 1, \quad \left( \frac{-\gamma_1}{a'} \right) = \left( \frac{\beta_1}{a'} \right) = \left( \frac{a}{a'} \right) \left( \frac{\beta'}{a'} \right). \end{aligned}$$

Somit wird

$$i^{\frac{c(1-\alpha)}{2}} = i^{\frac{h+\alpha-\alpha'}{2}} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \left( \frac{\beta'}{\alpha'} \right).$$

Nach Ersetzung von  $i^{h/2}$  durch  $\rho^{3h}$  ergiebt sich daher

$$\left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{i^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{N}} \eta \left( \frac{M}{N} \right) = \rho^{\alpha+2h} \left( \frac{\beta'}{\alpha'} \right) \frac{i^{\frac{1-\alpha'}{2}}}{\sqrt{N'}} \eta \left( \frac{M'}{N'} \right).$$

Der Factor  $\rho^{\alpha+2h}$  kann in zwei andere zerlegt werden, welche beziehungsweise nur von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  abhängen.

Der einfachste Weg zu dieser Zerlegung beruht auf dem Umstände, dass die Produkte  $(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1), (\gamma_1^2 - 1)(\delta_1^2 - 1)$  Vielfache von 24 sind. Denn einer der Factoren  $\alpha^2 - 1, \beta^2 - 1$  muss nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 sein, weil  $\alpha, \beta$  nicht beide durch 3 theilbar sein können, und  $\alpha^2 - 1$  ist ein Vielfaches von 8. Dieselben Gründe gelten für  $(\gamma_1^2 - 1)(\delta_1^2 - 1)$ . Es ist daher

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 \pmod{24}, \\ 1 &\equiv \gamma_1^2 + \delta_1^2 - \gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}, \end{aligned}$$

und die Multiplication mit  $g, h$  ergiebt

$$\begin{aligned} g &\equiv \alpha g\alpha + \beta g\beta - \alpha^2\beta g\beta \pmod{24}, \\ h &\equiv \gamma_1 h\gamma_1 + \delta_1 h\delta_1 - h\gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Nach Ersetzung von  $g\alpha, g\beta, h\gamma_1, h\delta_1$ , durch  $\gamma - \gamma_1, \delta - \delta_1, \alpha - \alpha_1, \beta - \beta_1$  folgt hieraus

$$\begin{aligned} g &\equiv \alpha(\gamma - \gamma_1) + \beta(\delta - \delta_1) - \alpha^2\beta(\delta - \delta_1) \pmod{24}, \\ h &\equiv \gamma_1(\alpha - \alpha_1) + \delta_1(\beta - \beta_1) - h\gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}, \end{aligned}$$

und man erhält durch Addition

$$\begin{aligned} g + h &\equiv \alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1 + \beta\delta - \beta_1\delta_1 - \alpha^2\beta\delta + \alpha_1^2\beta_1\delta_1 \\ &\quad + \delta_1(\alpha^2\beta - \alpha_1^2\beta_1) - h\gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Ersetzt man aber in den Identitäten

$$\alpha^2\beta - \alpha_1^2\beta_1 = (\alpha^2 + \alpha\alpha_1 + \alpha_1^2)(\beta - \beta_1) + (\alpha + \alpha_1)(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta),$$

$$\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 = (\alpha + \alpha_1)(\beta - \beta_1) + \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta,$$

$\beta - \beta_1$  durch  $h\delta_1$ ,  $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$  durch  $-h$ , so wird

$$\delta_1(\alpha^2\beta - \alpha_1^2\beta_1) = h\delta_1^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_1 + \alpha_1^2) - h\delta_1(\alpha + \alpha_1),$$

$$\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 = h\delta_1(\alpha + \alpha_1) - h,$$

und die Addition ergibt

$$\delta_1(a^2\beta - a_1^2\beta_1) = -a\beta + a_1\beta_1 - h + h\delta_1^2(a^2 + a\alpha_1 + a_1^2).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung nimmt die vorstehende Congruenz für  $g + h$ , wenn zur Abkürzung

$$A = a\gamma + \beta\delta - a^2\beta\delta - a\beta,$$

$$A' = a'\gamma' + \beta'\delta' - a'^2\beta'\delta' - a'\beta',$$

$$C = h(a^2 + a\alpha_1 + a_1^2 - \gamma_1^2)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$g + 2h \equiv A - A' + \delta_1^2 C \pmod{24}$$

an.

Nach Ersetzung von  $a$  durch  $h\gamma_1 + a_1$  wird ferner

$$C = (h^3 - h)\gamma_1^2 + 3h^2a_1\gamma_1 + 3ha_1^2.$$

Es ist also einerseits, weil  $h^3 - h$  nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 ist,

$$C \equiv 0 \pmod{3}$$

und anderseits, weil  $h$  gerade,  $a_1$  und  $\gamma_1$  ungerade sind,

$$\begin{aligned} C &\equiv -h + h^2 + 3h = 4\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} + 1\right) \pmod{8} \\ &\equiv 0 \pmod{8}. \end{aligned}$$

Da hiernach  $C$  ein Vielfaches von 24 ist, so folgt

$$g + 2h \equiv A - A' \pmod{24},$$

$$\rho^{g+2h} = \rho^{A-A'},$$

und man hat

$$\left(\frac{\beta}{a}\right) \frac{i^{\frac{1-a}{2}} \rho^{-A}}{\sqrt{N}} \eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta'}{a'}\right) \frac{i^{\frac{1-a'}{2}} \rho^{-A'}}{\sqrt{N'}} \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\beta}{a}\right) \frac{i^{\frac{1-a}{2}} \rho^{-A}}{\sqrt{N}} \eta\left(\frac{M}{N}\right)$$

ungeändert bleibt, wenn man von den Zahlen  $a, \beta, \gamma, \delta$  zu  $a', \beta', \gamma', \delta'$  übergeht. Letztere Zahlen besitzen aber dieselben Eigenschaften, welche bei den

ursprünglichen Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  vorausgesetzt werden und sind insofern einfacher, als  $|\beta'| < |\beta|$  ist. Denn es ist

$$\alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1,$$

$\alpha', \delta'$  ungerade,  $\beta'$  gerade,  $\alpha'$  positiv und  $|\beta'| < |\delta'| < |\beta|$ .

Ist  $\beta'$  noch nicht  $= 0$ , so kann eine neue Reihe von vier Zahlen  $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$  ermittelt werden, für welche der vorstehende Ausdruck denselben Werth hat wie für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Da die Zahlen  $|\beta|, |\beta'|, \dots$  eine abnehmende Reihe bilden, so führt dieses Verfahren nach einigen Schritten zu vier Zahlen  $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}, \delta^{(n)}$ , deren zweite  $= 0$  ist.

Hiermit ist die Aufgabe in allen Fällen auf die Bestimmung des vorstehenden Ausdrückes in dem Falle  $\beta = 0$  zurückgeführt. Dann ist aber

$$\alpha = \delta = 1, \quad A = \gamma, \quad \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) = \left( \frac{0}{1} \right) = 1,$$

und der fragliche Ausdruck wird

$$= \rho^{-\gamma} \eta(\gamma + \omega) = \eta(\omega).$$

Somit ist bei geradem  $\beta$

$$\eta \left( \frac{M}{N} \right) = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^4 \sqrt{N} \eta(\omega).$$

Ist  $\beta$  ungerade, so ist  $\beta - \alpha$  gerade,  $\delta - \gamma$  ungerade,

$$\alpha(\delta - \gamma) - (\beta - \alpha)\gamma = 1$$

und daher nach dem vorhergehenden Falle

$$\eta \left( \frac{M}{N} \right) = \eta \left[ \frac{\gamma + \frac{(\delta - \gamma)\omega}{1 + \omega}}{\alpha + \frac{(\beta - \alpha)\omega}{1 + \omega}} \right] = \left( \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^c \sqrt{\frac{N}{1 + \omega}} \eta \left( \frac{\omega}{1 + \omega} \right),$$

wo

$$C = \alpha\gamma + (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)(1 - \alpha^2) - \alpha(\beta - \alpha).$$

Es ist aber

$$\left( \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \right) = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right),$$

$$C - A - 1 = (1 - \alpha^2)(\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma - 1)$$

$$= (\alpha^3 - \alpha)(2\delta - \gamma)$$

$$\equiv 0 \pmod{24},$$

weil  $a^3 - a$  durch 3 und 8 theilbar ist, und

$$\begin{aligned}\eta\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right) &= \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}} \eta\left(-1-\frac{1}{\omega}\right) \\ &= \rho^{-1} \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}} \eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) \\ &= \rho^{-1} \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}} \sqrt{-i\omega} \eta(\omega).\end{aligned}$$

Da überdies die Größen  $iN/\omega$ ,  $-i\omega/(1+\omega)$ ,  $-i\omega$  positive reelle Bestandtheile haben, so wird

$$\sqrt{\frac{iN}{\omega}} \sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}} = \sqrt{\frac{N}{1+\omega}}, \quad \sqrt{\frac{iN}{\omega}} \sqrt{-i\omega} = \sqrt{N}$$

und demnach

$$\sqrt{\frac{N}{1+\omega}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\omega}} \sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}}.$$

Daher ist, wie bei geradem  $\beta$ ,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^A \sqrt{N} \eta(\omega).$$

#### § 4.

Es sei  $\beta\gamma$  ungerade. Man darf  $\beta$  positiv annehmen.

Man hat

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta \left[ \frac{\delta + \gamma \frac{1}{\omega}}{\beta + \alpha \frac{1}{\omega}} \right]$$

und daher auf Grund des bereits erledigten Falles

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{-a}{\beta}\right) i^{\frac{\beta-1}{2}} \rho^B \sqrt{\frac{N}{\omega}} \eta\left(\frac{-1}{\omega}\right),$$

wo

$$B = \beta\delta + a\gamma - a\gamma\beta^2 + a\beta$$

ist. Es ist aber

$$\left(\frac{-a}{\beta}\right) = \left(\frac{-1}{\beta}\right) \left(\frac{a}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \left(\frac{a}{\beta}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \eta(\omega),$$

$$\sqrt{-iN} \frac{1}{\sqrt{-i\omega}} = \sqrt{\frac{N}{\omega}}$$

und sonach

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{a}{\beta}\right) i^{\frac{1-\beta}{2}} \rho^\beta \sqrt{-iN} \eta(\omega).$$


---